

历年考研数学

真题汇总

(数学一)

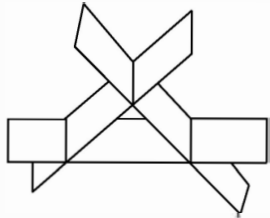
(2010-2019)



研区考研
YAN SHI QU KAO YAN

2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k = (\quad)$
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
- (2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 (\quad)
(A) 可导点,极值点. (B) 不可导点,极值点.
(C) 可导点,非极值点. (D) 不可导点,非极值点.
- (3) 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是 (\quad)
(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$. (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$.
- (4) 设函数 $Q(x, y) = \frac{x}{y^2}$. 如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为 (\quad)
(A) $y - \frac{x^2}{y^3}$. (B) $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$. (C) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. (D) $x - \frac{1}{y}$.
- (5) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T A x$ 的规范形为 (\quad)
(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.
- (6) 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$ 组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 A, \bar{A} , 则 (\quad)
(A) $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$.
(B) $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 2$.
(C) $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$.
(D) $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 1$.
- 
- (7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是 (\quad)
(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.
(C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$. (D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$.
- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\} (\quad)$
(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关. (B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.
(C) 与 μ, σ^2 都有关. (D) 与 μ, σ^2 都无关.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设函数 $f(u)$ 可导, $z = f(\sin y - \sin x) + xy$, 则 $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

(10) 微分方程 $2yy' - y^2 - 2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解 $y =$ _____.

(11) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____.

(12) 设 Σ 设为曲面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 (z \geq 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} \sqrt{4 - x^2 - 4z^2} dx dy =$ _____.

(13) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为 3 阶矩阵. 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 _____.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(16) (本题满分 10 分)

设 a, b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $l = -3i - 4j$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(I) 求 a, b ;

(II) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \geq 0)$ 的面积.

(17) (本题满分 10 分)

求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(18) (本题满分 10 分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$.

(I) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

(19) (本题满分 10 分)

设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2 (0 \leq z \leq 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 3, 2)^T, \alpha_3 = (1, a, 3)^T$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基, $\beta = (1, 1, 1)^T$ 在这个基下的坐标为 $(b, c, 1)^T$.

(I) 求 a, b, c ;

(II) 证明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基, 并求 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.

(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y ;

(II) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p$, $P\{Y = 1\} = 1 - p (0 < p < 1)$. 令 $Z = XY$.

(I) 求 Z 的概率密度;

(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(III) X 与 Z 是否相互独立?

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu, \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 A ;

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量.

2018 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 下列函数中,在 $x = 0$ 处不可导的是()

(A) $f(x) = |x| \sin |x|$.

(B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$.

(C) $f(x) = \cos |x|$.

(D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$.

(2) 过点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, 且与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面为()

(A) $z = 0$ 与 $x + y - z = 1$.

(B) $z = 0$ 与 $2x + 2y - z = 2$.

(C) $x = y$ 与 $x + y - z = 1$.

(D) $x = y$ 与 $2x + 2y - z = 2$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} = ()$

(A) $\sin 1 + \cos 1$.

(B) $2\sin 1 + \cos 1$.

(C) $2\sin 1 + 2\cos 1$.

(D) $2\sin 1 + 3\cos 1$.

(4) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则()

(A) $M > N > K$.

(B) $M > K > N$.

(C) $K > M > N$.

(D) $K > N > M$.

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) 设 A, B 为 n 阶矩阵,记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, (X, Y) 表示分块矩阵,则()

(A) $r(A, AB) = r(A)$.

(B) $r(A, BA) = r(A)$.

(C) $r(A, B) = \max\{r(A), r(B)\}$.

(D) $r(A, B) = r(A^T, B^T)$.

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $P\{X < 0\} =$

()

(A) 0.2.

(B) 0.3.

(C) 0.4.

(D) 0.5.

(8) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本,据此样本检验假设: $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$, 则()

(A) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .

(B) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .

(C) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .

(D) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$, 则 $k =$ _____.

(10) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数. 若曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0,0)$ 且与曲线 $y = 2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切, 则 $\int_0^1 xf''(x) dx =$ _____.

(11) 设 $F(x, y, z) = xy\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$, 则 $\text{rot } F(1, 1, 0) =$ _____.

(12) 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_L xy ds =$ _____.

(13) 设 2 阶矩阵 A 有两个不同特征值, α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, 且满足 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, 则 $|A| =$ _____.

(14) 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC = \emptyset$. 若 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(AC | AB \cup C) = \frac{1}{4}$, 则 $P(C) =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

(16) (本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

(17) (本题满分 10 分)

设 Σ 是曲面 $x = \sqrt{1 - 3y^2 - 3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy$.

(18) (本题满分 10 分)

已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的连续函数.

(I) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解;

(II) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解.

(19) (本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(20) (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

(21) (本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a ;

(II) 求满足 $\mathbf{AP} = \mathbf{B}$ 的可逆矩阵 \mathbf{P} .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为

λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(I) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;

(II) 求 Z 的概率分布.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;

(II) 求 $E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$.

2017 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0, \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则()

- (A) $ab = \frac{1}{2}$. (B) $ab = -\frac{1}{2}$. (C) $ab = 0$. (D) $ab = 2$.

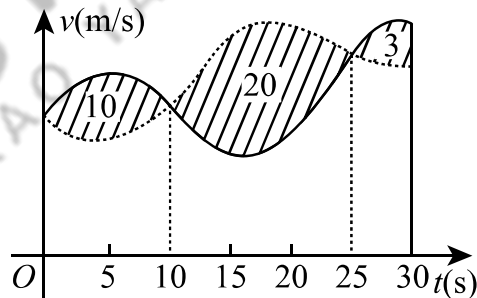
(2) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x) > 0$,则()

- (A) $f(1) > f(-1)$. (B) $f(1) < f(-1)$.
(C) $|f(1)| > |f(-1)|$. (D) $|f(1)| < |f(-1)|$.

(3) 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$ 的方向导数为()

- (A) 12. (B) 6. (C) 4. (D) 2.

(4) 甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位:m)处,图中,实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ (单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次是 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位:s),则()



- (A) $t_0 = 10$.
(B) $15 < t_0 < 20$.
(C) $t_0 = 25$.
(D) $t_0 > 25$.

(5) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵,则()

- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆. (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆.
(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆. (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

(6) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则()

- (A) A 与 C 相似, B 与 C 相似. (B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似.
(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似. (D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似.

(7) 设 A, B 为随机事件. 若 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是()

- (A) $P(B|A) > P(B|\bar{A})$. (B) $P(B|A) < P(B|\bar{A})$.
(C) $P(\bar{B}|A) > P(\bar{B}|\bar{A})$. (D) $P(\bar{B}|A) < P(\bar{B}|\bar{A})$.

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是()

- (A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布. (B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.
(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布. (D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 若曲线积分 $\int_L \frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

(16) (本题满分 10 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$. 证明:

(I) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根;

(II) 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同实根.

(19) (本题满分 10 分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 $\mu(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C .

(I) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;

(II) 求 S 的质量 M .

(20) (本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(I) 证明 $r(A) = 2$;

(II) 设 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 \mathbf{Q} .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P\{X=0\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$, Y 的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{Y \leq E(Y)\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

(23) (本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i=1, 2, \dots, n)$. 利用 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 估计 σ .

(I) 求 Z_1 的概率密度;

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(III) 求 σ 的最大似然估计量.

2016 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛,则()
- (A) $a < 1$ 且 $b > 1$. (B) $a > 1$ 且 $b > 1$.
(C) $a < 1$ 且 $a + b > 1$. (D) $a > 1$ 且 $a + b > 1$.
- (2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是()
- (A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$
(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$
- (3) 若 $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解,则 $q(x) =$ ()
- (A) $3x(1+x^2)$. (B) $-3x(1+x^2)$. (C) $\frac{x}{1+x^2}$. (D) $-\frac{x}{1+x^2}$.
- (4) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \end{cases}$ 则()
- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. (B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
(C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导. (D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.
- (5) 设 A, B 是可逆矩阵,且 A 与 B 相似,则下列结论错误的是()
- (A) A^T 与 B^T 相似. (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.
(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似. (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.
- (6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为()
- (A) 单叶双曲面. (B) 双叶双曲面. (C) 椭球面. (D) 柱面.
- (7) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则()
- (A) p 随着 μ 的增加而增加. (B) p 随着 σ 的增加而增加.
(C) p 随着 μ 的增加而减少. (D) p 随着 σ 的增加而减少.
- (8) 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为()
- (A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 向量场 $A(x, y, z) = (x + y + z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 的旋度 $\text{rot } A = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x + 1)z - y^2 = x^2 f(x - z, y)$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1 + ax^2}$, 且 $f'''(0) = 1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{X} = 9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(I) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛;

(II) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 的值.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x + 1)e^{2x - y}$, 且 $f(0, y) = y + 1$, L_t 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

(18) (本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面

$$\text{积分 } I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1) dydz - 2ydzdx + 3zdx dy.$$

(19) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$. 证明:

(I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$. 当 a 为何值时, 方程 $AX = B$ 无解、有唯一

解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, X_3

为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

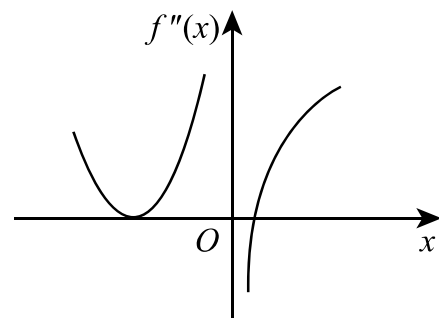
(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

2015 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为()



- (A) 0. (B) 1.
(C) 2. (D) 3.

(2) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解,则()

- (A) $a = -3, b = 2, c = -1$. (B) $a = 3, b = 2, c = -1$.
(C) $a = -3, b = 2, c = 1$. (D) $a = 3, b = 2, c = 1$.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的()

- (A) 收敛点,收敛点. (B) 收敛点,发散点.
(C) 发散点,收敛点. (D) 发散点,发散点.

(4) 设 D 是第一象限中的曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域,函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续,则 $\iint_D f(x, y) dx dy = ()$

- (A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr$. (B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{\sqrt{\sin 2\theta}}{1}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr$.
(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr$. (D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{\sqrt{\sin 2\theta}}{1}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr$.

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分

必要条件为()

- (A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$. (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$.
(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$. (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$. 若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为()

- (A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件,则()

- (A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$. (B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.
(C) $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$. (D) $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

- (8) 设随机变量 X, Y 不相关, 且 $E(X) = 2, E(Y) = 1, D(X) = 3$, 则 $E[X(X+Y-2)] = (\quad)$
 (A) -3. (B) 3. (C) -5. (D) 5.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 Ω 是由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 则 $\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 值.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

(19) (本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z = x, \end{cases}$ 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $B(0, -\sqrt{2}, 0)$, 计算曲线积

分 $I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2y^2dz$.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

(I) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基;

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 ξ .

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

2014 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 下列曲线中有渐近线的是()
- (A) $y = x + \sin x$. (B) $y = x^2 + \sin x$. (C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$. (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$.
- (2) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上()
- (A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.
 (C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.
- (3) 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = ()$
- (A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.
 (B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$.
 (C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$.
 (D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$.
- (4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b \in \mathbf{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$, 则 $a_1 \cos x + b_1 \sin x = ()$
- (A) $2\sin x$. (B) $2\cos x$. (C) $2\pi \sin x$. (D) $2\pi \cos x$.
- (5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = ()$
- (A) $(ad - bc)^2$. (B) $-(ad - bc)^2$. (C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$. (D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$.
- (6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的()
- (A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.
 (C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.
- (7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) = ()$
- (A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.
- (8) 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在, X_1 与 X_2 概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$, 随机变量 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, 则()
- (A) $E(Y_1) > E(Y_2), D(Y_1) > D(Y_2)$. (B) $E(Y_1) = E(Y_2), D(Y_1) = D(Y_2)$.
 (C) $E(Y_1) = E(Y_2), D(Y_1) < D(Y_2)$. (D) $E(Y_1) = E(Y_2), D(Y_1) > D(Y_2)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

- (9) 曲面 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处的切平面方程为_____.
- (10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x) = 2(x - 1), x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.
- (11) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y =$ _____.
- (12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L z dx + y dz =$ _____.
- (13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是_____.
- (14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自

总体 X 的简单随机样本, 若 $c \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计, 则 $c =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$. 若 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(18) (本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$ 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy.$$

(19) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

(II) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服

从均匀分布 $U(0, i)$ ($i=1, 2$).

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数且大于零. X_1, X_2, \dots, X_n

为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(III) 是否存在实数 a , 使得对任何 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$?

2013 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则()
- (A) $k = 2, c = -\frac{1}{2}$. (B) $k = 2, c = \frac{1}{2}$.
(C) $k = 3, c = -\frac{1}{3}$. (D) $k = 3, c = \frac{1}{3}$.
- (2) 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为()
- (A) $x - y + z = -2$. (B) $x + y + z = 0$.
(C) $x - 2y + z = -3$. (D) $x - y - z = 0$.
- (3) 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$ ($n = 1, 2, \dots$). 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则 $S\left(-\frac{9}{4}\right) =$ ()
- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $-\frac{1}{4}$. (D) $-\frac{3}{4}$.
- (4) 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1, L_2: x^2 + y^2 = 2, L_3: x^2 + 2y^2 = 2, L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针方向的平面曲线. 记 $I_i = \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 则 $\max \{ I_1, I_2, I_3, I_4 \} =$ ()
- (A) I_1 . (B) I_2 . (C) I_3 . (D) I_4 .
- (5) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则()
- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.
(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.
(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.
(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.
- (6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为()
- (A) $a = 0, b = 2$. (B) $a = 0, b$ 为任意常数.
(C) $a = 2, b = 0$. (D) $a = 2, b$ 为任意常数.
- (7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2), p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\}$ ($i = 1, 2, 3$), 则()
- (A) $p_1 > p_2 > p_3$. (B) $p_2 > p_1 > p_3$.
(C) $p_3 > p_1 > p_2$. (D) $p_1 > p_3 > p_2$.
- (8) 设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$ ()
- (A) α . (B) $1 - \alpha$. (C) 2α . (D) $1 - 2\alpha$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P\{Y \leq a+1 | Y > a\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.

(16) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(I) 证明 $S''(x) - S(x) = 0$;

(II) 求 $S(x)$ 的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

(19) (本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z = 0, z = 2$ 所围成的立体为 Ω .

(I) 求曲面 Σ 的方程;

(II) 求 Ω 的形心坐标.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$;

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 令随机变量 $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geq 2. \end{cases}$

(I) 求 Y 的分布函数;

(II) 求概率 $P\{X \leq Y\}$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零. X_1, X_2, \dots, X_n

为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

2012 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为()
(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.
- (2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ ()
(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.
(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^nn!$.
- (3) 如果函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是()
(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.
(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.
(C) 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在.
(D) 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在.
- (4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k = 1, 2, 3$), 则有()
(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$. (C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.
- (5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关的为()
(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.
- (6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,
 $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ ()
(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\} =$ ()
(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{5}$.

(8) 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为()

(A) 1.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $-\frac{1}{2}$.

(D) -1.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) =$ _____.

(10) $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx =$ _____.

(11) $\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right) \Big|_{(2,1,1)} =$ _____.

(12) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$ _____.

(13) 设 α 为 3 维单位列向量, E 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为 _____.

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB \mid \bar{C}) =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (-1 < x < 1)$.

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x=f(t), \\ y=\cos t \end{cases} (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0)=0, f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$.

若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19) (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段, 计算曲线积分 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 计算行列式 $|\mathbf{A}|$;

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}$ 的秩为 2.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将二次型 f 化为标准形.

(22) (本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X=2Y\}$;

(II) 求 $\text{Cov}(X-Y, Y)$.

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$. 记 $Z = X - Y$.

(I) 求 Z 的概率密度 $f(z; \sigma^2)$;

(II) 设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

2011 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是()
(A) (1,0). (B) (2,0). (C) (3,0). (D) (4,0).
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) 无界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为()
(A) $(-1, 1]$. (B) $[-1, 1)$. (C) $[0, 2)$. (D) $(0, 2]$.
- (3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0$, $f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是()
(A) $f(0) > 1, f''(0) > 0$. (B) $f(0) > 1, f''(0) < 0$.
(C) $f(0) < 1, f''(0) > 0$. (D) $f(0) < 1, f''(0) < 0$.
- (4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$, 则 I, J, K 的大小关系为()
(A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$. (C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$.
- (5) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()
(A) $P_1 P_2$. (B) $P_1^{-1} P_2$. (C) $P_2 P_1$. (D) $P_2 P_1^{-1}$.
- (6) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为()
(A) α_1, α_3 . (B) α_1, α_2 . (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.
- (7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是()
(A) $f_1(x)f_2(x)$. (B) $2f_2(x)F_1(x)$.
(C) $f_1(x)F_2(x)$. (D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.
- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在, 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV) =$ ()
(A) $E(U) \cdot E(V)$. (B) $E(X) \cdot E(Y)$.
(C) $E(U) \cdot E(Y)$. (D) $E(X) \cdot E(V)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

- (9) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____.
- (10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

(11) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题 (本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(16) (本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

(17) (本题满分 10 分)

求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

(18)(本题满分 10 分)

(I) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立;

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1	Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23)(本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未知, \bar{X} 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

2010 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = (\quad)$

- (A) 1. (B) e. (C) e^{a-b} . (D) e^{b-a} .

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

- ()
(A) x . (B) z . (C) $-x$. (D) $-z$.

(3) 设 m, n 均是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性()

- (A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 的取值有关.
(C) 与 m, n 的取值都有关. (D) 与 m, n 的取值都无关.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = (\quad)$

- (A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$. (B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$.
(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$. (D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$.

(5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则()

- (A) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$. (B) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$.
(C) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$. (D) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$.

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于()

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.
(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $P\{X=1\} = (\quad)$

- (A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$. (D) $1 - e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足()

- (A) $2a + 3b = 4$. (B) $3a + 2b = 4$. (C) $a + b = 1$. (D) $a + b = 2$.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

(9) 设 $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1 + u^2) du, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x|$ ($x \in [-1, 1]$), 起点是 $(-1, 0)$, 终点为 $(1, 0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$. 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{C}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$, 则 $E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

(17) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n=1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n=1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C , 并计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解.

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 \mathbf{Q} 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(I) 求矩阵 \mathbf{A} ;

(II) 证明 $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ 为正定矩阵, 其中 \mathbf{E} 为 3 阶单位矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1 - \theta$	$\theta - \theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0, 1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 ($i = 1, 2, 3$). 试求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.